**ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**

**Линейное** (векторное) **пространство** – непустое множество элементов произвольной природы, а сами элементы- векторы, если заданы **2 операции**:  
**1**. Сложения 2х векторов  
**2**. Умножения вектора на число  
Также оно должно удовлетворять **8 аксиомам**:  
1) х+у  
2) (х+у)+z  
3) E 0 т.ч. x+0=x  
4) E -x, т.ч. x+(-x)=0  
5) 1\*x=x  
6) a\*(b\*x)=(ab)\*x  
7) a\*(x+y)=(a\*x)+(a\*y)  
8) (a+b)\*x=(a\*x)+(b\*x)

**Свойства линейных пространств:**  
1) E! 0   
2) E! -x для любого x  
3) 0\*x=0  
4) -1\*x=-x  
5) -(-x)=x  
6) a\*0=0  
7) если a\*x=0 и a!=0 > x=0   
8) если a\*x=0 и x!=0 > a=0

**Подпространство** линейного пространства если выполняется **3 условия**:  
1) В *подпространстве* заданы те же операци что и в *пространстве*  
2) Сложение 2х векторов принадлежит подпространству  
3) Умножения вектора на число принадлежит подпространству  
Т.е. подпространство само является линейным пространством.

Линейно-**зависимая** система векторов л.пр-ва – если Е набор чисел а1,а2…, среди которых хотя бы 1 число отлично от нуля и (а1\*х1)+(а2\*х2)….= 0 (лин.комбинация)

Линейно-**независимая** система векторов л.пр-ва – если условие выше выполняется только при а1 = а2 =…= 0

**Теорема 1.**  
Если к системе ***r лин-зав*** векторов добавить ***m любых*** векторов, то получим систему из r+m лин-зав векторов.

**Теорема 2.**  
Если из системы ***r лин-незав*** векторов удалить ***m<r любых*** векторов, то получим систему из ***r-m лин-незав*** векторов.

**Теорема 3.**  
Если среди х1, х2, х3… Е 0 вектор, то векторы ***лин-зависимы***Тогда система из 1го вектора линейно зависима только если этот вектор 0

**Теорема 4.**  
Система векторов лин.пр-ва лин-зависима тогда и только тогда, когда хотя бы 1 из них является лин.комбинацией остальных.

**Размерность** л.пр-ва. – максимальное число линейно-независимых векторов.  
Выполнены 2 условия:  
1. Е n линейно-независимых векторов  
2. Любая система n+1 векторов линейно зависима  
Тогда dimV = n

**Базис** лин.пр-ва (n-мерного) – любая упорядоченная совокупность (система) n лин-независимых в-в  
  
(одну своб.переменную за 1, отальные за 0)

**ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

**Метрические пространства**.

**Метрическое пространство** – это непустое множество Х элементов произвольной природы (сами элементы - точки) если каждой паре x,y ставится в соответствие число, обозначаемое p(x,y) удовл.**3 аксиомам**:  
1) p(x,y) >= 0 AND p(x,y) = 0 тогда и только тогда, когда x=y  
2) p(x,y)=p(y,x)  
3) неравенство треугольника: p(x,y) <= p(x,z) + p(z,y)  
Обозначение пр-ва (X,p)  
Введённая операция – метрика. (формула типа p(x,y) = …?)  
Число p(x,y) – расстояние между х и у

**Подпространство** метрического пространства – подмножество У элементов множества Х (с той же самой метрикой рассматриваемое)

**Фундаментальная** последовательность метрического пространства (конченое)

**Теорема**.  
Если элементы метрического пр-ва сходятся, то последовательность является **фундаментальной**

**Полное** метрическое пр-во – любая фунд. посл-ть сходится к эл-ту из мн-ва

**Нормированные пространства**

**Нормированное пространство** – лин.пр-во, где каждому ***вектору х*** ставится в соответствие число ***||х|| - норма*** вектора х, которая удовлетворяет условиям:  
1) ||x|| >=0, ||x|| = 0 когда x = 0  
2) ||a\*x||=|a|\*||x||  
3) ||x+y|| <= ||x||+||y||

**Евклидовы пространства**

**Евклидово пространство** – лин.пр-во, где каждой ***паре векторов x,y*** ставится в соответствие ***число (x,y),*** удовлетворяющее след.условиям:  
1) (x,x)>=0, (x,x)=0 когда х=0  
2) (x,y)=(y,x)  
3) (a\*x,y)=a\*(x,y)  
4) (x+y,z)=(x,z)+(y,z)

(x,y) **– скалярное произведение** векторов

**Неравенство** Коши-Буняковского  
|(x,y)|<= ||x||\*||y||  
|(x,y)|<= sqrt(x,x)\*sqrt(y,y)

**Норма** для евклидова пространства: ||x|| = sqrt(x,x)

**Угол** между векторами  
cos(f)=(x,y)/||x||\*||y||  
векторы **перпендикулярны** если (x,y) = 0

**Построение ортонормированного базиса  
Нормированный** (единичный) **вектор** – если ||x|| = 1  
Для любого х!=0 Е 2 нормированных вектора  
х\||x|| и -х\||x||  
число +-1\||x|| - нормированный множитель

**Ортогональная** система – векторы попарно ортогональны

**Ортонормированная** с-ма – векторы попарно ортогональны и нормированы

**Ортогональный базис** – если базисные векторы образуют ортог.(ортонорм.) систему векторов

**Теорема**.  
В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

**ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**

**Линейное пространство –** любому х поставлен в соответствие единственный вектор у, по правилу у=f(х)  
Задан оператор f действующий из V в V

**Линейный оператор** -